La prise de notes
au cours de mathématiques
en 1er BAC ingénieur de gestion

par A. COOLEN & A.F. LANOTTE

Qu’est-ce que la prise de notes ?

- relever rapidement les points essentiels
- dans le but de
  - recréer l’exposé complet
  - comprendre l’articulation

Pourquoi prendre des notes ?

- pour déjà comprendre une première fois et imprégner sa mémoire des notions essentielles
- pour avoir les informations principales qu'il faudra
  - compléter
  - structurer

  après le cours
- pour garder une trace
  - des détails des démonstrations,
  - des explications relatives aux graphiques,
  - des « tuyaux »…

Travail en plusieurs étapes

- assister aux cours, écouter activement, prendre des notes
- retravailler ses notes (dans les notes manuscrites) pour qu’elles soient
  – complètes
  – compréhensibles
  – prêtes à être exploitées
- produire ses propres outils
  – table des matières
  – synthèse par chapitre
  – structure du cours, liens entre certains chapitres

Prise de notes pendant l'exposé
La gestion de l'espace et de l'information

- **recto seul**
  - verso de la feuille précédente disponible pour des compléments
  - permet une vue globale d'une partie de cours
  - manipulation plus facile
- **identification de chaque feuille**
  - numéro
  - date
  - code $\Rightarrow$ contexte

Prise de notes pendant l’exposé

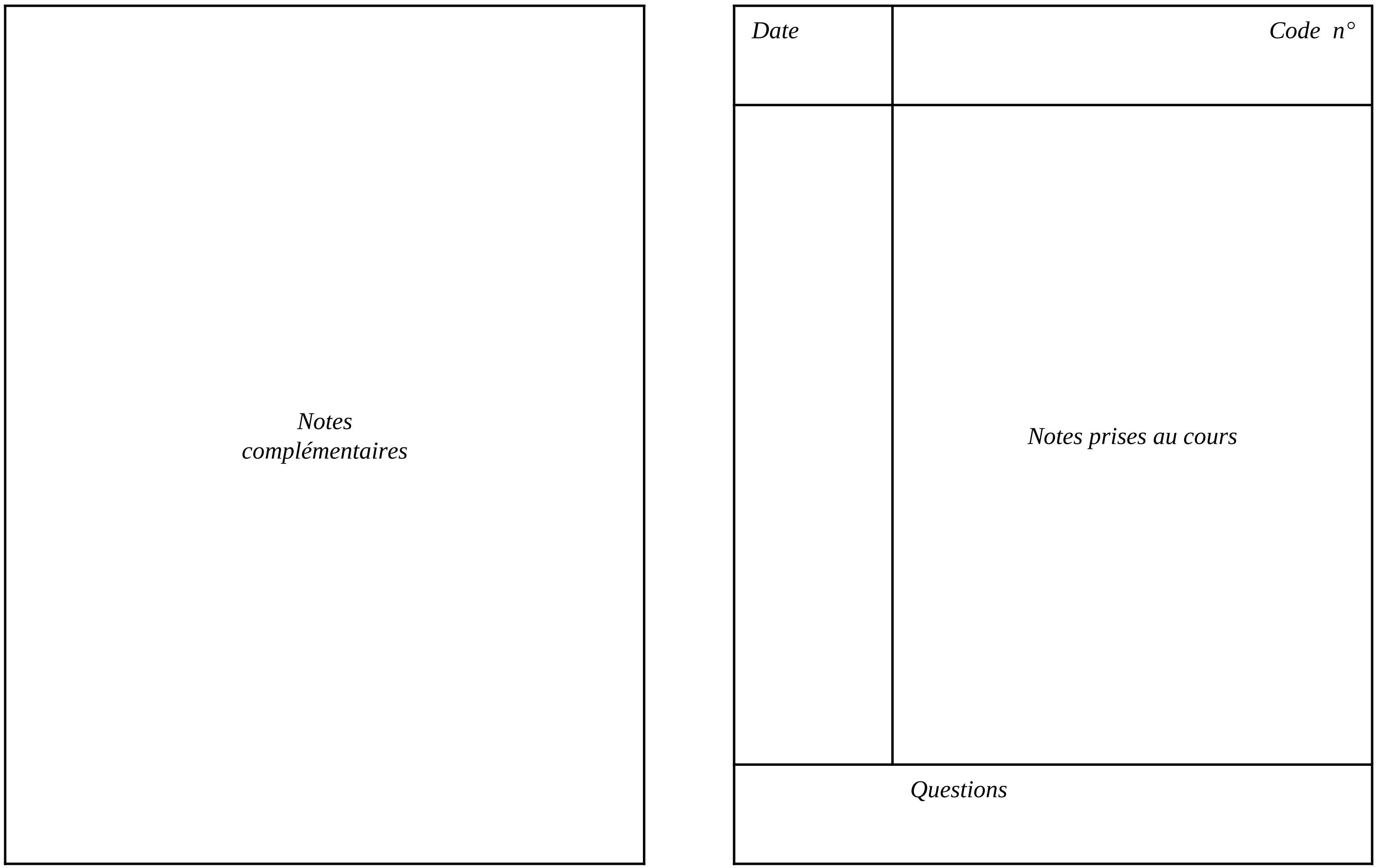
La gestion de l’espace et de l’information

- **marge à gauche**
  – éléments de structure (théorème, définition, propriété, exemple)
  – mot-clé
  – signe distinctif
  – renvoi à une autre feuille

- **place réservée aux questions en bas de page**

Prise de notes pendant l’exposé

La gestion de l’espace et de l’information



Prise de notes pendant l'exposé

La gestion de l'espace et de l'information

AERER LA PRISE DE NOTES

laisser de la place

- pour les énoncés en français
- pour l'insertion des éléments justificatifs
- pour l'insertion des liens (car, donc, en particulier,…)

NE PAS RECOPIER LES NOTES LORS DE LEUR REMISE EN ORDRE

C'est perdre beaucoup de temps!

Il faut COMPLETER LES NOTES PRISES AU COURS

$\Rightarrow$ EFFICACITE : lisibilité, clarté des idées plutôt que beauté

Prise de notes pendant l'exposé

La gestion de l'espace et de l'information

- **mettre en retrait**
  - les exemples
  - les éléments moins importants (cas particuliers)

  $\Rightarrow$ hiérarchisation de l'information avec des retraits successifs ou des couleurs

Prise de notes pendant l'exposé
L'attitude pendant l'exposé

ETRE ACTIF

- suivre de manière simultanée le raisonnement du professeur
  - meilleure compréhension
  - diminution des erreurs de transcription

    (ne pas confondre x et X, *X et X, « ou » et « et »,…)
- parfois « précéder » le professeur dans l'écriture d'éléments déjà connus
- laisser une zone blanche si vous êtes dépassé par le rythme (avec un code approprié pour se rappeler que l'exposé est incomplet) et redevenir synchrone

Prise de notes pendant l'exposé

L'attitude pendant l'exposé

QUE NOTER ?

- ce qui est écrit au tableau

  quoique …

- mais aussi les raisonnements énoncés oralement

Remise en ordre des notes

COMPLETER LES NOTES MANUSCRITES

$\Rightarrow$ comprendre pour pouvoir assimiler plus tard

- en s'aidant du livre
- en se remémorant ce qui a été dit pendant l'exposé oral (ce qui implique qu'il faut remettre en ordre ses notes si possible le jour même du cours)

- en s'aidant des synthèses (structure)
- en ajoutant des exemples (concrétisation cf. compréhension)
- en comparant ses notes avec celles d'un condisciple (si doutes)
- en demandant des explications aux assistantes pédagogiques

Remise en ordre des notes

STRUCTURER

- numéroter, hiérarchiser
- encadrer les énoncés
- distinguer : hypothèse, thèse, démonstration, utilité des hypothèses, exemples
- ajouter des éléments justificatifs
- faire des liens

En fin de chapitre

- faire sa propre synthèse

  $\Rightarrow$ appropriation de la matière

  et la confronter à celle proposée sur le site
- réaliser un document « intermédiaire » avec ce qu'il est nécessaire de retenir pour être capable de reconstruire l'entièreté des démonstrations
- associer les différents types d'exercices à la matière théorique
- parfois, utilité d'un tableau de classification
- s'exercer suffisamment au niveau des exercices : les refaire seul « à cahier fermé » puis en faire d'autres dont on n'a jamais vu la solution

  COMPRENDRE UN EXERCICE RESOLU PAR QUELQU'UN D'AUTRE NE SUFFIT PAS!
- ne pas oublier la remédiation s'il reste des problèmes

Avant l’examen

- étude :

  normalement tout est compris, les notes sont complètes :

  ⇨ s’entraîner à reconstruire pour la maîtrise finale :

  - de manière claire et précise, avec les justifications
  - sur base de documents à compléter (résumé, synthèse…) : connaître le plan du cours
  - en vérifiant a posteriori par rapport aux notes du cours si c’est correct

  attention, tout ce qui peut être reconstruit par un raisonnement pas trop long ne doit pas être étudié « par cœur »

Avant l'examen

Gérer son temps de manière optimale

- repérer les théorèmes ou les explications qui posent problèmes lors de la restitution pour y revenir ultérieurement
- refaire les exercices qui posent difficulté
- ne pas refaire « 36 » exercices du même genre mais être capable de s'adapter à des variations de raisonnement
- ne pas refaire tous les calculs jusqu'au bout pour tous les exercices

Gérer le travail de tous les cours

⇨ Repérer tout ce qu’on voudrait/devrait faire :

- Pour chaque cours : lister supports disponibles et les décisions de travail
- Visualiser son horaire de cours
- Repérer ses contraintes (trajet, job…)
- Faire le point sur ses loisirs (hit parade)

Travailler en plusieurs étapes

⇨ se construire un planning en plusieurs étapes, sur base de son horaire type (7j !)

- Placer les contraintes éventuelles
- Placer les moments de travail
  - Compréhension/travail des notes/exercices pour chaque cours chaque semaine : avant la séance suivante, selon sa « forme »
  - Résumés/plans… en fin de chapitres
- Placer le(s) loisir(s) prioritaire(s)
- Garder des marges de manœuvre (retard, maladie, sortie imprévue…)

Travailler en plusieurs étapes

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
7.00							
8.00				Cours 1	Cours 7		C2 Lect Comp Annot
9.00	Cours 1	C4 Lect Comp Annot	Cours 2 : répétitions				
10.00	Cours 2		Cours 3	Cours 5	Cours 8	C3 Lect Comp	C2 Ex
11.00		Cours 3					
12.00	Repas	Repas	Repas	Repas	Repas	Repas	Repas
13.00	Courses	Cours 3/5 : labos	Cours 4	Cours 5 : répétitions		Job	
14.00					Cours 9		Volley
15.00	C8 Lect - Comp - Rés		Cours 2	Cours 3 : répétitions			
16.00	C7 Lect - Comp - ordre			C3 ex	C9 confrontation notes		
17.00							
18.00	Petit(e) ami(e), Repas	Repas	Courses Repas	Repas	Nettoyage, vaisselle … Repas	Repas	C9 Rés
19.00		Labo	Vaisselle…	Petit(e) ami(e)	Volley		Repas
20.00	C2 Rés	Petit(e) ami(e)	Petit(e) ami(e)	C5 Lect Comp Annot		C1 Lect Comp Annot	C5 Rés Ex
21.00							
22.00					Copains	Petit(e) ami(e)	
23.00							
24.00							

Bon travail !

C’est le moment de s’y mettre

et de faire appel, si nécessaire,

- Aux assistants pédagogiques (compréhension) pendant les exercices du lundi ou sur rdv
- Au SGE (gestion de l’ensemble des cours) sur rv (guidance.etude@ulg.ac.be)

Dirichlet : livre

Les exemples ci-dessus montrent qu'il est possible d'avoir des fonctions partout définies, mais non partout continues. Il est même possible de construire des fonctions définies pour tout réel et discontinues en tout point. Ainsi, la fonction d, dite de Dirichlet, qui à tout réel x associe

$$d(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est rationnel} \\ 0 \text{ si } x \text{ est irrationnel} \end{cases}$$

n'est nulle part continue. En effet, soit r un réel quelconque ; pour tout réel x positif, il existe un réel y tel que

$$|r - y| < x \text{ et } |d(r) - d(y)| = 1 \ ;$$

par la règle de transfert, pour tout $^*x = \varepsilon$ infiniment petit positif, on peut trouver un hyperréel $^*y$ tel que

$$|r - {}^*y| < \varepsilon \text{ et } |d(r) - d(^*y)| = 1.$$

Ainsi, $^*y$ est infiniment proche de r mais tel que $\mathrm{st}\big(d(^*y)\big) \neq d(r)$.

Dirichlet :

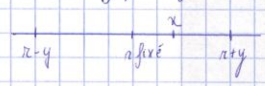
Minimum de notes prises au cours

Fonction de Dirichlet

$d : x \in \mathbb{R} \to d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

n'est nulle part continue

Preuve : $\mathcal{P}$: $\forall r \in \mathbb{R}$, $\forall y$ positif : $\exists x \in \mathbb{R} : 0 < |x - r| < y$ et $|d(x) - d(r)| = 1$



si $d(r) = 1$, $d(x) = 0$

si $d(r) = 0$, $d(x) = 1$

$\overset{RET}{\Longrightarrow}$ $^*\mathcal{P}$: $\forall r$ réel, $\underbrace{\forall {}^*y \text{ positif}}$, $\exists {}^*x \in {}^*\mathbb{R} : 0 < |{}^*x - r| < {}^*y$ et $|d({}^*x) - d(r)| = 1$

$\hookrightarrow {}^*y$ ipp

${}^*x \approx r$ et $d({}^*x) \not\approx d(r)$

Rappel

Déf. Une fonction f est continue en r

si $\forall {}^*x \in H(r) \cap {}^*D$: ${}^*x \simeq r$, on a $f({}^*x) \simeq f(r)$

En conséquence,

f est discontinue en r

si $\exists {}^*x \in H(r) \cap {}^*D$: ${}^*x \simeq r$ et $f({}^*x) \not\simeq f(r)$

x est rationnel s'il existe 2 entiers p et q $(q \neq 0)$ tels que $x = \frac{p}{q}$

Fonction de Dirichlet

Voir p. 20 et 21 — Des exemples déjà vus plus haut ont montré qu'il est possible d'avoir des fonctions partout définies mais non partout continues.

Il est même possible de construire des fonctions partout définies mais discontinues en tout point.

Théorème

> La fonction de Dirichlet, définie par
>
> $$d : x \in \mathbb{R} \longrightarrow d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \ (x \text{ rationnel}) \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \ (x \text{ irrationnel}) \end{cases}$$
>
> n'est nulle part continue

Hyp : Définition de la fonction de Dirichlet

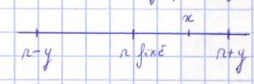
Thèse : La fonction de Dirichlet est discontinue en tout point $r \in \mathbb{R}$

Transformation de la thèse en langage mathématique

$\forall r \in \mathbb{R}$, $\exists {}^*x \in {}^*\mathbb{R}$: ${}^*x \simeq r$ et $d({}^*x) \not\simeq d(r)$

Preuve : $\mathcal{P}$: $\forall r \in \mathbb{R}$, $\forall y$ positif : $\exists x \in \mathbb{R}$: $0 < |x - r| < y$ et $|d(x) - d(r)| = 1$

Car



$\forall r$ réel, $\forall y$ réel positif, on a $r - y < r < r + y$

si $d(r) = 1$, $d(x) = 0$ — Si r est rationnel, $\exists x$ irrationnel : $r - y < x < r + y$ et $|\underbrace{d(x)}_{0} - \underbrace{d(r)}_{1}| = 1$

si $d(r) = 0$, $d(x) = 1$ — Si r est irrationnel, $\exists x$ rationnel : $r - y < x < r + y$ et $|\underbrace{d(x)}_{1} - \underbrace{d(r)}_{0}| = 1$

Donc $\forall r$ réel, $\forall y$ positif : $\exists x$: $r - y < x < r + y$ et $|d(x) - d(r)| = 1$

$-y < x - r < y$

$0 < |x - r| < y$

On obtient bien ainsi la propriété $\mathcal{P}$ écrite ci-dessus

RET $\Rightarrow$ ${}^*\mathcal{P}$: $\forall r$ réel, $\forall {}^*y$ positif, $\exists {}^*x \in {}^*\mathbb{R}$: $0 < |{}^*x - r| < {}^*y$ et $|d({}^*x) - d(r)| = 1$

En particulier, pour ${}^*y$ ipp, $\exists {}^*x \in {}^*\mathbb{R}$: $0 < |{}^*x - r| < \underbrace{{}^*y}_{\text{ipp}}$

donc

$|{}^*x - r| \triangleright$ ipp

donc

${}^*x \simeq r$ et $d({}^*x) \not\simeq d(r)$

Dirichlet : que retenir ?

Fonction de Dirichlet

Théorème : $d : x \in \mathbb{R} \to d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

n'est nulle part continue

Pour démontrer

Ecrire la thèse en langage mathématique

$\forall r \in \mathbb{R},\ \exists\, {}^*x \in {}^*\mathbb{R} : {}^*x \simeq r$ et $d({}^*x) \not\simeq d(r)$

Partir de la proposition

$P : \forall r \in \mathbb{R},\ \forall y$ positif : $\exists x \in \mathbb{R} : 0 < |x - r| < y$ et $|d(x) - d(r)| = 1$

qu'il faut démontrer.

R.E.T.

Considérer le cas particulier où ${}^*y$ est ipp

Dérivée d’un produit : livre

- Pour le produit, on obtient semblablement :

$$f(r)g(r) + \frac{{}^*Y}{\omega} = f(r)g(r) + \frac{{}^*X}{\omega}\big(f'(r)g(r) + f(r)g'(r)\big) + \dots$$

On en déduit cette égalité sur les parties standards

$$Y = \big(f'(r)g(r) + f(r)g'(r)\big)X,$$

d’où la thèse.

Dérivée d’un produit :

Minimum de notes prises au cours

Le ...

Dérivabilité | 34

Dérivée d'un produit

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x
alors $f \cdot g$ est dérivable en x et $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Soit le point $P(x, (f \cdot g)(x)) = (x, f(x) \cdot g(x))$

$\mathcal{M}_\omega^P$

$$^*x = \frac{^*X}{\omega} + x \quad \text{et} \quad ^*y = \frac{^*Y}{\omega} + f(x) \cdot g(x)$$

$$^*\mathcal{C} \equiv \; ^*y = f(^*x) \cdot g(^*x)$$

$$\frac{^*Y}{\omega} + f(x) \cdot g(x) = f\left(\frac{^*X}{\omega} + x\right) \cdot g\left(\frac{^*X}{\omega} + x\right)$$

$$\frac{^*Y}{\omega} + f(x) \cdot g(x) = \left(f(x) + f'(x) \cdot \frac{^*X}{\omega} + \dots\right)\left(g(x) + g'(x) \cdot \frac{^*X}{\omega} + \dots\right)$$

$$^*Y = f(x) \cdot g'(x) \, ^*X + f'(x) \cdot g(x) \, ^*X + \dots$$

$$Y = f(x) \cdot g'(x) \, X + f'(x) \cdot g(x) \, X$$

$$Y = \underbrace{\left(f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)\right)}_{(f \cdot g)'(x)} X$$

f est dérivable en x

$$\Rightarrow st\left(\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right) = f'(x) \qquad \forall \varepsilon \text{ ip}$$

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = f'(x) + \alpha \qquad \text{où } \alpha \text{ ip ou nul}$$

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = f'(x).\varepsilon + \alpha\varepsilon$$

$$\boxed{f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x).\varepsilon + \alpha.\varepsilon \qquad \forall \varepsilon \text{ ip}}$$

En particulier, pour ${}^*X$ limité et ω igp, on a $\frac{{}^*X}{\omega}$ ip

et donc $f\left(x + \frac{{}^*X}{\omega}\right) = f(x) + f'(x)\frac{{}^*X}{\omega} + \alpha.\frac{{}^*X}{\omega}$ où α ip ou nul

De même, g est dérivable en x

$\Rightarrow g\left(x + \frac{{}^*X}{\omega}\right) = g(x) + g'(x)\frac{{}^*X}{\omega} + \alpha'\frac{{}^*X}{\omega}$ où α' ip ou nul

Thm | **Dérivée d'un produit**

Si f et g sont deux fonctions dérivables en x
alors $f.g$ est dérivable en x et $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

H $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } x \\ g \text{ est dérivable en } x \end{cases}$

Th $f.g$ est dérivable en x et $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Dém $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

Soit le point $P(x, (f.g)(x)) = (x, f(x).g(x))$

Soient les points ${}^*P({}^*x, {}^*y) \simeq P(x, f(x).g(x))$

Considérons un microscope virtuel de puissance ω igp placé au point P

$$\mathcal{M}_\omega^P : \underbrace{({}^*x, {}^*y) \in \mathcal{M}_\omega(P)}_{{}^*X \text{ et } {}^*Y \text{ sont limités}} \to ({}^*X, {}^*Y) : \begin{cases} ({}^*x - x)\,\omega = {}^*X \\ ({}^*y - f(x).g(x)).\,\omega = {}^*Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad {}^*x = \frac{{}^*X}{\omega} + x \quad \text{et} \quad {}^*y = \frac{{}^*Y}{\omega} + f(x).g(x)$$

$$\mathcal{C} \equiv y = f(x).g(x)$$

$$\xrightarrow{RT+RE} \quad {}^*\mathcal{C} \equiv {}^*y = f({}^*x).g({}^*x)$$

$$\frac{{}^*Y}{\omega} + f(x).g(x) = f\left(\frac{{}^*X}{\omega} + x\right).g\left(\frac{{}^*X}{\omega} + x\right)$$

$$\frac{{}^*Y}{\omega} + f(x).g(x) = \left(f(x) + f'(x)\frac{{}^*X}{\omega} + \alpha\frac{{}^*X}{\omega}\right)\left(g(x) + g'(x)\frac{{}^*X}{\omega} + \alpha'\frac{{}^*X}{\omega}\right)$$

car f et g dérivables en x

$$\frac{{}^*Y}{\omega} + \cancel{f(x)g(x)} = \cancel{f(x)g(x)} + f(x).g'(x)\frac{{}^*X}{\omega} + f(x)\alpha'\frac{{}^*X}{\omega} + f'(x)g(x)\frac{{}^*X}{\omega}$$
$$+ f'(x)g'(x)\frac{{}^*X^2}{\omega^2} + f'(x).\alpha'\frac{{}^*X^2}{\omega^2} + \alpha.g(x)\frac{{}^*X}{\omega} + \alpha.g'(x)\frac{{}^*X^2}{\omega^2} + \alpha.\alpha'\frac{{}^*X^2}{\omega^2}$$

Mult. par ω

$${}^*Y = f(x).g'(x)\,{}^*X + \underbrace{f(x)\,\alpha'\,{}^*X}_{\text{ip ou nul}} + f'(x)\,g(x)\,{}^*X + \underbrace{\alpha.\,g(x)\,{}^*X}_{\text{ip ou nul}} + \underbrace{o\left[\frac{1}{\omega}\right]}_{\text{ip}}$$

R.P.S

$$Y = f(x).g'(x)\,X + f'(x)\,g(x)\,X$$

$$Y = \underbrace{\left(f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\right)}_{(f.g)'(x)}X$$

Dérivée d'un produit : que retenir ?

Dérivée d'un produit

Théorème : Si f et g sont dérivables en x

alors $f.g$ est dérivable en x

et $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

Pour démontrer

Appliquer $\mathcal{M}_{\omega}^{P}$ au point $P(x, f(x).g(x))$

Utiliser la propriété qui découle de la déf. de la dérivabilité d'un fonction en un point x :

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + f'(x).\varepsilon + \alpha.\varepsilon \quad \forall \varepsilon \text{ ip}$$

où α if

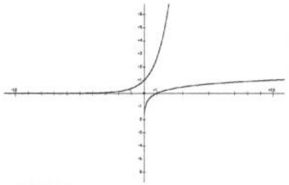
et l'appliquer à $f\left(x + \frac{{}^{*}X}{\omega}\right)$ et à $g\left(x + \frac{{}^{*}X}{\omega}\right)$

Multiplier par ω et appliquer R.P.S.

Tableau de classification

Ordre de grandeur en cas de formes indéterminées

Ce plan, utilisé intelligemment, constitue une aide pour l'estimation de l'ordre de grandeur de nombres hyperréels.[1]

$\text{ig} - \text{ig}$	$\text{ip} \times \text{ig}$	$\dfrac{\text{ip}}{\text{ip}}$	$\dfrac{\text{ig}}{\text{ig}} \quad \left(\dfrac{\text{ig}}{\text{ig} - \text{ig}} \; ; \; \dfrac{\text{ig} - \text{ig}}{\text{ig}} \right)$	$\text{ip}^{\text{ip}} \quad \text{ig}^{\text{ip}} \quad (\approx 1)^{\text{ig}}$
• Pour un polynôme : mettre le terme de plus haut degré en évidence. • Pour une expression irrationnelle : multiplier par l'expression conjuguée. Puis, si on trouve une autre forme indéterminée, voir dans les autres colonnes. • Après transformations adéquates, utiliser L'Hospital ou Taylor / Mac Laurin.	Si f est ip et g est ig, transformer $f \times g$ sous la forme : $\dfrac{f}{\frac{1}{g}}$ est $\dfrac{\text{ip}}{\text{ip}}$ ou $\dfrac{g}{\frac{1}{f}}$ est $\dfrac{\text{ig}}{\text{ig}}$ puis voir l'une des deux colonnes suivantes.	• Pour une fraction rationnelle : factoriser et simplifier. • Pour une fraction irrationnelle : multiplier par l'expression conjuguée. • L'Hospital • Taylor / Mac Laurin	• Pour une fraction rationnelle : Mettre en évidence les termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur, puis simplifier. • Pour une fraction irrationnelle : Mettre ω^n en évidence sous $\sqrt[n]{}$ Tenir compte de la propriété : Si n est pair, $\sqrt[n]{\omega^n} = \begin{cases} \omega & \text{si } \omega > 0 \\ -\omega & \text{si } \omega < 0 \end{cases}$ Si n est impair, $\sqrt[n]{\omega^n} = \omega \quad \forall \omega$ Puis simplifier. • L'Hospital • Taylor / Mac Laurin	Rappel :  Pour ω igp, e^{ω} est igp Pour ω ign, e^{ω} est ipp Pour ω igp, $\ln\omega$ est igp Pour ε ipp, $\ln\varepsilon$ est ign Transformer f^g sous la forme $e^{g.\ln f}$ • si f est ipp et g est ip alors $f^g = e^{g.\ln f} = e^{\text{ip.ign}}$ • si f est igp et g est ip, alors $f^g = e^{g.\ln f} = e^{\text{ip.igp}}$ • si $f \approx 1$ et g est ig alors $f^g = e^{g.\ln f} = e^{\text{ig.ip}}$

Ordre de grandeur
Règles de Leibniz

ADDITION

+	o	ip	ap	ig
o	o	ip	ap	ig
ip	ip	if	ap	ig
ap	ap	ap	lm	ig
ig	ig	ig	ig	?

Revenons aux cas qui posent problème

(1) ip + ip ?

ipp + ipp ▷ ipp
ipn + ipn ▷ ipn
ipp + ip n ?

<u>exemples</u> : Soit ε ipp
$2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$ ▷ ipp
$\varepsilon - 2\varepsilon = -\varepsilon$ ▷ ipn
$\varepsilon - \varepsilon = 0$.

donc ipp + ipn ▷ if

conclusion : **ip + ip ▷ if**

(2) ap + ap ?

<u>exemples</u> : Pour ε ip,
$2 + (1+\varepsilon) = 3+\varepsilon$ ap (car $3+\varepsilon \simeq 3$ réel non nul)
$2 + (\varepsilon - 2) = \varepsilon$ ip
$(2+\varepsilon) + (-2-\varepsilon) = 0$.
impossible d'avoir un ig

conclusion **ap + ap ▷ lm**

(3) ig + ig ?

igp + igp ▷ igp
ign + ign ▷ ign
igp + ign ?

<u>exemples</u> : Soit ω igp
$\omega^2 + (1-\omega) = \omega^2 - \omega + 1 = \omega^2\left(1 - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}\right)$ ▷ igp

$\omega + (1-\omega) = 1$ ▷ ap
$\omega + (\varepsilon - \omega) = \varepsilon$ ▷ ip
$(\omega - \varepsilon) + (\varepsilon - \omega) = 0$

donc igp + ign est indéterminé
(càd que tous les ordres de grandeur sont possibles)

conclusion **igp + ign ?**

MULTIPLICATION

·	0	ip	ap	ig
0	0	0	0	0
ip	0	ip	ip	?
ap	0	ip	ap	ig
ig	0	?	ig	ig

ip . ig ?

exemples : pour ε ip , $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1 \triangleright$ ap

$\varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon} \triangleright$ ip

$\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon} \triangleright$ ig

Deux autres cas d'indétermination apparaissent : $\frac{ip}{ip}$ et $\frac{ig}{ig}$ qui sont équivalents à ip . ig

(en effet : $\frac{ip}{ip} = ip \cdot \frac{1}{ip} = ip \cdot ig$ et $\frac{ig}{ig} = ig \cdot \frac{1}{ig} = ig \cdot ip$)

Comment "lever les indéterminations" ?

① $\frac{ip}{ip}$

a) fraction rationnelle

ex $\dfrac{\alpha - 3}{\alpha^2 + \alpha - 16}$ pour $\alpha \approx 3$ $\left(\frac{ip}{ip}\right)$

factorisation puis simplification

$$= \frac{\alpha - 3}{(\alpha - 3)(\alpha + 4)} = \frac{1}{\alpha + 4} \approx \frac{1}{7}$$

b) fraction irrationnelle

ex. $\dfrac{\sqrt{1+\varepsilon} - 1}{\varepsilon}$ pour ε ip. $\left(\frac{ip}{ip}\right)$

multiplication par l'expression conjuguée

$$= \frac{(\sqrt{1+\varepsilon} - 1)(\sqrt{1+\varepsilon} + 1)}{\varepsilon . (\sqrt{1+\varepsilon} + 1)} = \frac{1 + \varepsilon - 1}{\varepsilon(\sqrt{1+\varepsilon} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon} + 1} \approx \frac{1}{2}$$

c) avec des fonctions plus élaborées

ex. $\dfrac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ pour ε ip $\left(\frac{ip}{ip}\right)$

- théorème de L'Hospital

$(\sin x)' = \cos x$

$x' = 1$

$$\frac{\cos \varepsilon}{1} \approx 1 \implies \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \approx 1$$

- développement de Mac Laurin

développement de M.L. de $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$

$$\implies \sin \varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} \ldots$$

$$\implies \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \ldots}{\varepsilon}$$

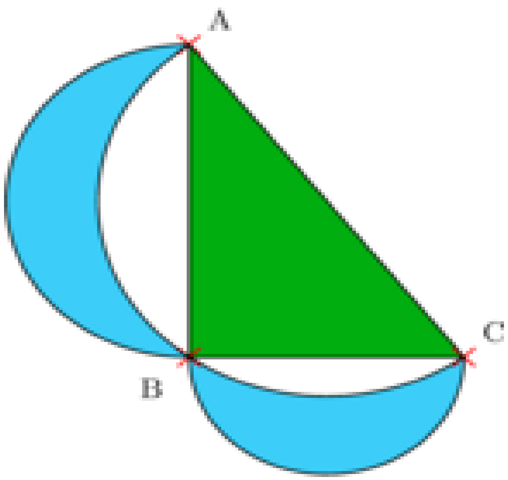
$$= \frac{\cancel{\varepsilon}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3!} + \ldots\right)}{\cancel{\varepsilon}} \approx 1$$

② $\frac{ig}{ig}$

...

Théorème des deux lunules

L' aire d'un triangle rectangle est égale à la somme des aires des lunules obtenues en ayant soustrait le demi-cercle construit sur l'hypoténuse aux demi-cercles construits sur les deux autres côtés du triangle



$$D = D_1 + D_2$$

$$T + S_1 + S_2 = \left(L_1 + S_1\right) + \left(L_2 + S_2\right)$$

$$T = L_1 + L_2$$